Übungsstunde Analysis 2:

Heutige Themen:

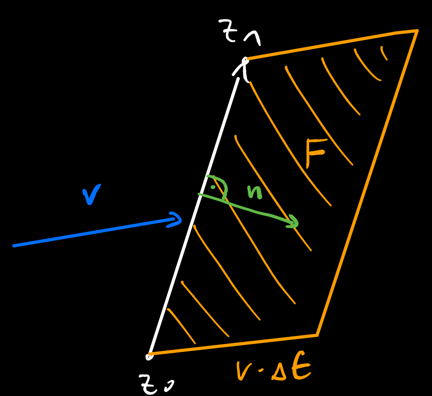
- Strömungsfelder und Flussintegrale in 2D
- Der Satz von Gauss in 2D
- Strömungsfelder und Flussintegrale in 3D
- Der Satz von Gauss in 3D

Strömungsfelder und Flussintegrale in 2D:

Ziel: Möchten den Fluss Φ eines Feldes v über eine bestimmte Fläche (3D) / Kurve (2D)

↳ Die "Flüssigkeitsmenge", welche pro Zeiteinheit die gerichtete Fläche/Kurve durch-/überströmt.

Intuition:

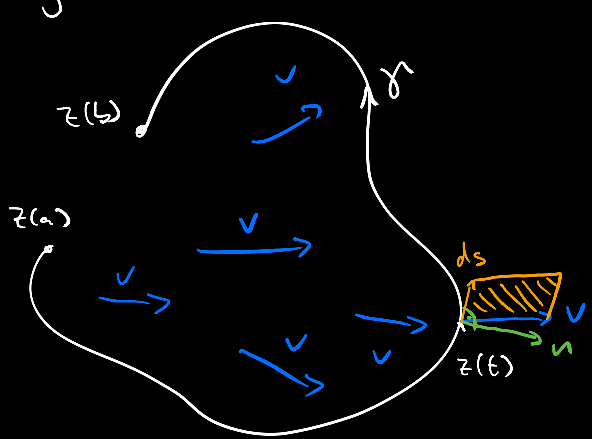


Fläche = Flüssigkeitsmenge

$$\Phi_{(z_1-z_0)} = \frac{\text{Flüssigkeitsmenge}}{\Delta t} = \frac{v \cdot \Delta t \cdot n \cdot (z_1 - z_0)}{\Delta t}$$

$$= \underline{v \cdot n \cdot (z_1 - z_0)}$$

allgemeiner Fall:



$(z_1 - z_0) \to ds$

"$\Phi(z(t)) = v(z(t)) \cdot n(z(t)) \cdot ds$"

$$\Rightarrow \Phi_\gamma = \boxed{\underline{\underline{\int_\gamma \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot ds}}} = \int_\gamma \vec{v}\, d\vec{s}$$

Wie findet man n?

Bei Kurven trivial, entweder:

$$n = \frac{\begin{bmatrix} -dy \\ dx \end{bmatrix}}{\|ds\|} \quad \text{oder} \quad \boxed{n = \frac{\begin{bmatrix} dy \\ -dx \end{bmatrix}}{\|ds\|}}$$

Richtige Wahl für den Satz von Gauss

$$\Rightarrow \int_\gamma v \cdot \underbrace{n \cdot ds}_{\begin{bmatrix} dy \\ -dx \end{bmatrix}} = \underline{\underline{\int_\gamma P\,dy - Q\,dx}} \left(= \int_\gamma \begin{bmatrix} -Q \\ P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \right)$$

Im allgemeinen Fall parametrisieren wir die Kurve γ für das Linienintegral und erhalten:

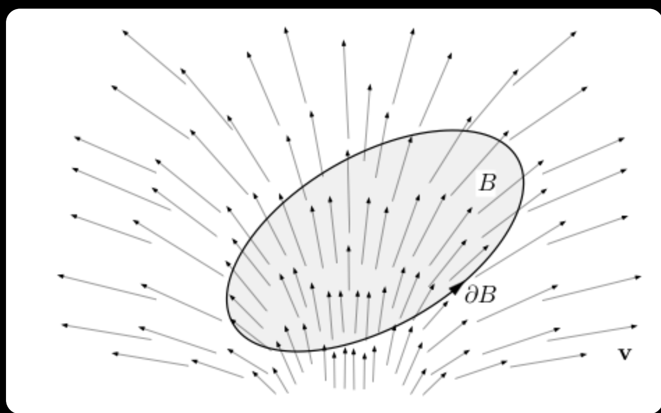
$$\boxed{\int_\gamma v \cdot n \cdot ds = \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot\gamma_y(t) \\ -\dot\gamma_x(t) \end{bmatrix} dt}_{}}$$

Müssen nicht mehr tangentiales Linienelement, sondern normales betrachten

⇝ Bei dieser Wahl des Normalenvektors und unserer üblichen Wahl des Randzyklus steht n immer auf der Menge ⟺ zeigt nach aussen.

↳ Nur wichtig falls Kurve geschlossen, für den Satz von Gauss.

Grundintuition für den Satz von Gauss:



$$\Phi := \int_{\partial B} v \cdot n \cdot ds = \int_{\partial B} P\,dy - Q\,dx$$

⇒ Der Fluss über den geschlossenen Rand einer Menge B beschreibt gerade den Saldo der aus B pro Zeiteinheit dt herausströmenden Flüssigkeitsmenge.

$\Phi > 0$: In B ist eine Quelle → es fliesst mehr raus als rein

$\Phi < 0$: In B ist eine Senke → es fliesst mehr rein als raus

$\Phi = 0$: Weder noch

↳ Erinnert uns an die Divergenz eines Feldes!

Der Satz von Gauss in der Ebene:

Herleitung: ∂B der Rand einer Menge B

$$\Phi = \int_{\partial B} v \cdot n \, ds = \int_{\partial B} \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dy \\ -dx \end{bmatrix} = \int_{\partial B} P\,dy - Q\,dx = \int_{\partial B} \begin{bmatrix} -Q \\ P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

$$= \int_{\partial B} K \, ds = \int_{\partial B} \begin{bmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{Q} \end{bmatrix} ds \overset{\text{Green}}{=} \int_{B} \tilde{Q}_x - \tilde{P}_y \, dS$$

$$= \int_{B} P_x + Q_y \, dS = \int_{B} \operatorname{div}(v) \, dS \qquad \square$$

Satz: Es seien $v = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$ ein Strömungsfeld auf dem
(6.6) Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $B \subset \Omega$ ein Bereich mit Randzyklus ∂B. Dann gilt:

$$\boxed{\int_{\partial B} v \cdot n \cdot ds = \underbrace{\int_{B} \operatorname{div}(v) \, dS}}$$

Saldo der Flüssigkeitsproduktion pro Zeiteinheit in B ist gleich dem Integral der Quellstärken $\operatorname{div}(v)$ in jedem Punkt der Menge.

Beispiel:

$$v = \begin{bmatrix} x + \exp(\tanh(y) + y^2) \\ \log(x+1) + y \end{bmatrix}, \quad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 9y^2 = 4\}$$

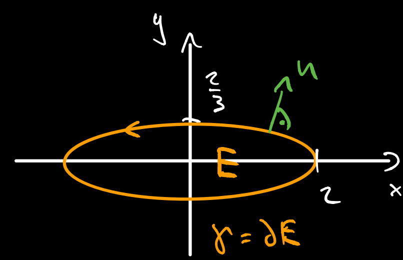
Berechne den Fluss Φ von v über E von innen nach aussen.

$$\Rightarrow \int_E v \cdot n \cdot ds = \int_{\{x^2+9y^2 \leq 4\}} \operatorname{div}(v)\, dS = \int_{\{x^2+9y^2 \leq 4\}} 2\, dS = 2 \cdot \mu(\{x^2+9y^2 \leq 4\})$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi$$

$$= \underline{\underline{\frac{8}{3}\pi}}$$

Fläche einer Ellipse mit Halbachsen a & b ist gerade $a \cdot b \cdot \pi$ $\rightarrow$ Theorie 10



Strömungsfelder und Flussintegrale in 3D:

Betrachten nun generelle 2-dimensionale UMFK S:

$$S: B \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \mapsto r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

Die Parameterdarstellung $r(u,v)$ ist <u>regulär</u> in einem Punkt, falls dort

$$r_u \times r_v \neq 0$$

gilt. $\Leftrightarrow$ Falls ein Normalenvektor existiert.

$\Rightarrow$ Dann spannen die beiden Vektoren r_u & r_v eine wohldefinierte Tangentialebene auf.

Ist die Parameterdarstellung im Punkt $p = (u_0, v_0)$ regulär, so stellt

$$n = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}$$

den Normaleneinheitsvektor dar.

Bem: Es gibt in jedem Punkt p 2 valide Normalen. Im 3-dimensionalen muss man sich die Richtung <u>immer</u> gut überlegen!

Zusammenhang mit dem Flächenelement von UMFK:

$$\boxed{\sqrt{g^r} = \sqrt{\det(r'^T r')} = \|r_u \times r_v\|}$$

$\rightsquigarrow$ "skalares Oberflächenelement"

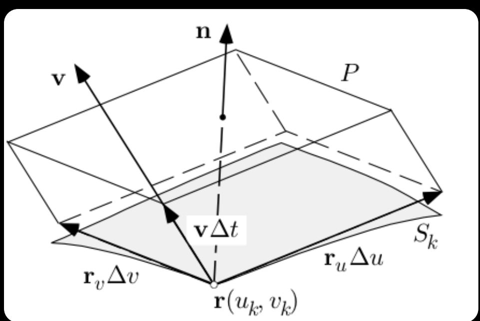
Orientierung einer allgemeinen Fläche:

Eine der beiden möglichen Normalenrichtungen muss als "positiv" erklärt werden.

→ Die Normale, welche in die Richtung des zu berechnenden Flusses Φ zeigt!

Fluss durch eine allg. 2-dim. UMFK:

Intuition:



Volumen = Flüssigkeitsmenge

$$\Phi_{(\Delta u,\Delta v)} = \frac{\text{Flüssigkeitsmenge}}{\Delta t} = \frac{v\cdot\Delta t\cdot(r_u\Delta u \times r_v \Delta v)}{\Delta t}$$

$$= \underline{v\cdot(r_u\times r_v)\,\Delta u\,\Delta v}$$

allgemeiner Fall: $\Delta u \Delta v \to du\,dv$

$$\Phi(u_k,v_k) = v(r(u_k,v_k))\cdot(r_u(u_k,v_k)\times r_v(u_k,v_k))\,du\,dv$$

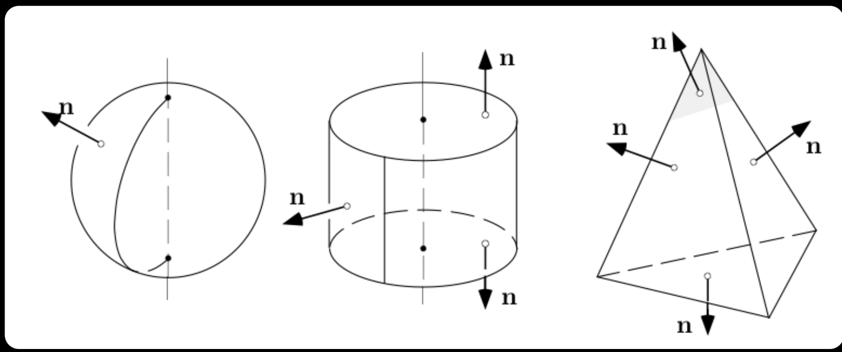
$$\boxed{\Phi = \int_S v(r(u,v))\cdot\underbrace{(r_u(u,v)\times r_v(u,v))\,du\,dv}_{d\vec{S} \,=\, \,=\, \vec{n}\,dS} = \underline{\underline{\int_S v\cdot n\,du\,dv}}}$$

→ "vektorielles Oberflächenelement"

Oberfläche S muss aus 2-Ketten (glatten Teiloberflächen) bestehen.

Dann darf das Flussintegral auch auf diese 2-Ketten aufgeteilt werden.

Der Satz von Gauss im Raum:



Ihr müsst immer überprüfen, dass eure berechneten Normalenvektoren nach aussen zeigen!

Satz: Es seien v ein C^1-Vektorfeld auf dem
(6.7) Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und $B \subset \Omega$ ein Bereich mit nach aussen orientierter Oberfläche ∂B:

$$\boxed{\int_{\partial B} v \cdot n \, dS = \int_B \operatorname{div}(v) \, d\mu}$$

Bem: $n \cdot dS = d\vec{S}$ wird das vektorielle Oberflächenelement genannt.

$$\left(v(x) = \begin{bmatrix} a(x) \\ b(x) \\ c(x) \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \operatorname{div}(v) = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \right)$$

3D-Volumenformel mit Gauss:

Suchen Feld v mit $\operatorname{div}(v) = k$

$$\Rightarrow \mu(B) = \frac{1}{k} \int_B \operatorname{div}(v)\, d\mu = \frac{1}{k} \int_{\partial B} v \cdot n \, dS$$

Beispiel: $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \operatorname{div}(v) = \underline{3}$$

$$\mu(B) = \frac{1}{3} \int_\Omega 3 \, d\mu = \frac{1}{3} \int_{\partial\Omega} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot n \cdot d$$

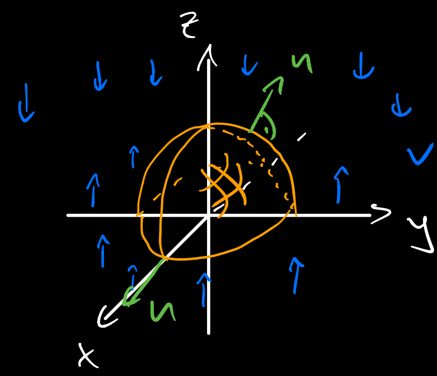
$$= \frac{1}{3} \int_{\partial\Omega} \tilde{r} \cdot \frac{\tilde{r}}{R} \, dS = \frac{R}{3} \int_{\partial\Omega} 1 \, dS$$

$$= \frac{R}{3} \cdot 4R^2\pi = \underline{\underline{\frac{4}{3} R^3 \pi}}$$

Beispiel:

$$v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-z \end{bmatrix}, \quad H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0\}$$

Berechne den Fluss von v durch H von unten nach oben?



Direkte Berechnung:

1) Parametrisieren H: Kugelkoordinaten

$$r : [0, \tfrac{\pi}{2}) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$$

$$(\theta, \varphi) \mapsto r(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

2) Partielle Abl. berechnen:

$$r_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{bmatrix}, \quad r_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

3) Normalenvektor berechnen:

$$n \cdot dS = r_\theta \times r_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\begin{bmatrix} \sin^2\theta\cos\varphi \\ \sin^2\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\theta \end{bmatrix}}$$

4) Orientierung überprüfen?

→ Betrachten x-Achse: $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$

$$\Rightarrow n \cdot dS = \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \quad \checkmark \quad \text{richtige Richtung!}$$

5) Integral berechnen:

$$\Phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-\cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin^2\theta\cos\varphi \\ \sin^2\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\theta \end{bmatrix} d\varphi \, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta - \cos^2\theta\sin\theta \, d\theta$$

$$= 2\pi \left(\left[\frac{\sin^2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}$$

Mit Gauss berechnen:

1) Oberfläche schliessen, denn sie ist offen?

Machen sie mit $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1, z=0\}$

Betrachten $\partial B = H \cup G$

$$\Rightarrow \Phi = \int_{\partial B} v \cdot n \cdot dS = \int_H v \cdot n \cdot dS + \underbrace{\int_G v \cdot n \cdot dS}_{\text{neu}} = \int_B \operatorname{div}(v)\, d\mu$$

$$\operatorname{div}(v) = \underline{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_H v \cdot n \cdot dS = \int_B \operatorname{div}(v)\, d\mu - \int_G v \cdot n \cdot dS}$$

$\int_G v\, n\, dS$: Polarkoordinaten $r(r,\varphi) = \underline{\begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}}$

$$r_r = \underline{\begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}}, \quad r_\varphi = \underline{\begin{bmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$n \cdot dS = r_r \times r_\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$$ $\rightarrow$ zeigt in die <u>falsche</u> Richtung

$$\Rightarrow \quad n \cdot dS = \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \int_G v \cdot n \cdot dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{bmatrix} d\varphi \, dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 -r \quad d\varphi \, dr$$

$$= \underline{-\pi}$$

$$\int_B \operatorname{div}(v) \, d\mu = - \int_B 1 \, d\mu = -\mu(B) = \underline{-\frac{2}{3}\pi}$$

$$\Rightarrow \int_H v \cdot n \cdot dS = \int_B \operatorname{div}(v) \, d\mu - \int_G v \cdot n \cdot dS$$

$$= -\frac{2}{3}\pi - (-\pi) = \underline{\underline{\frac{1}{3}\pi}}$$